

Derivata av $\sin x$

Tobias Wennberg, SSIS - TE21D

January 7, 2024

Contents

1	Sats	2
2	Bevis	3
2.1	Antaganden	3
2.1.1	Instängningssatsen	3
2.1.2	Snabba räkneregler för $\lim$	3
2.1.3	Derivata definition	3
2.1.4	Additionsats för $\sin$ ($\sin(u + v)$)	3
2.2	Bevis	4
2.2.1	Lösning av $\frac{\sin h}{h}$	4
2.2.2	Lösning av $\frac{\cos h - 1}{h}$	5
2.2.3	Slutsats	5

1 Sats

Då vinkeln x är i radianer gäller

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

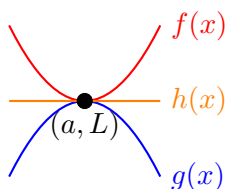
2 Bevis

2.1 Antaganden

2.1.1 Instängningssatsen

För kontinuerliga funktioner $f(x)$ och $g(x)$ som uppfyller

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ Gäller för kontinuerliga funktionen $h(x)$ där $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$ är $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$



2.1.2 Snabba räkneregler för lim

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) * g(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x)) * \lim_{x \rightarrow a} (g(x))$

2.1.3 Derivata definition

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

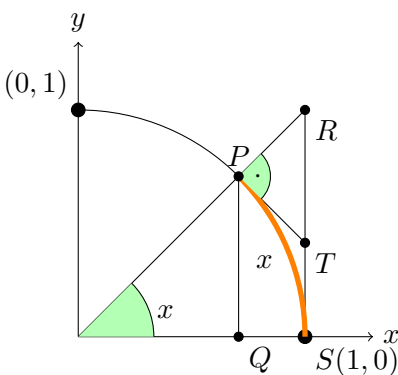
2.1.4 Additionsats för sin ($\sin(u+v)$)

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

2.2 Bevis

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad f(x) = \sin x \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x \cdot \cos h - \sin x}{h} + \frac{\cos x \cdot \sin h}{h} \right) \\
 &= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}
 \end{aligned}$$

2.2.1 Lösning av $\frac{\sin h}{h}$



$$x > 0$$

$$\sin x = |PQ| < |PS| < x, \quad x \leq |PT| + |ST| < |RS| = \tan x$$

$$\frac{\sin x}{x} < 1, \quad x < \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \cdot \cos x < \sin x$$

Ovan innebär att

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Och enligt instängningsatsen är då

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

2.2.2 Lösning av $\frac{\cos h - 1}{h}$

$$\begin{aligned}\frac{\cos h - 1}{h} &= \frac{\cos h - 1}{h} \cdot \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1} \\ &= \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} \\ &= \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} \\ &= \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{\cos h + 1}\end{aligned}$$

Som tidigare visat är $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{\cos h + 1} = 0/2 = 0$$

2.2.3 Slutsats

Med x i radianer.

$$\begin{aligned}f(x) &= \sin x \\ f'(x) &= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \\ &= \cos x\end{aligned}$$

☐ Q.E.D